

因式分解的应用（加油站）

一、公式法的应用

1. 若 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边，满足 $a^2 - 2ab + b^2 = 0$ 且 $b^2 - c^2 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）。
A. 直角三角形 B. 等腰三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形
2. 分解因式： $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4) - 24$ （ ）。
A. $a(a-5)(a^2-5a+10)$ B. $a(a-4)(a^2-5a+10)$
C. $a(a-5)(a^2-3a+10)$ D. $a(a-5)(a^2-5a-10)$
3. 马小虎同学做了一道因式分解的习题，做完之后，不小心让墨水把等式： $a^4 - \blacksquare = (a^2 + 4)(a + 2)(a - \blacktriangle)$ 中的两个数字盖住了，那么式子中的 $\blacksquare$ 、 $\blacktriangle$ 处对应的两个数字分别是（ ）。
A. 64, 8 B. 24, 3 C. 16, 2 D. 8, 1
4. 计算 $\frac{2013^3 - 2 \times 2013^2 - 2011}{2013^3 + 2013^2 - 2014}$ 。
A. $\frac{2013}{2014}$ B. $\frac{2011}{2014}$ C. $\frac{2009}{2014}$ D. $\frac{2007}{2014}$
5. 如果 a 、 b 是整数，且 $x^2 + x - 1$ 是 $ax^3 + bx + 1$ 的因式，则 b 的值为 _____。
6. 分解因式： $1 + x + x(x+1) + x(x+1)^2 + \dots + x(x+1)^n =$ _____。（ n 为正整数）
7. 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 57 = 8a + 8b + 10c$ ，请你判断 $\triangle ABC$ 的形状。

8. 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且有 $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a + c)$ ，试判断三角形的形状。

9. 已知 $a + b + c = 0$ ，求证： $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$ 。

10. 先阅读材料，再解答下列问题：

材料：因式分解 $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$ 。

解：将“ $x + y$ ” 看成一个整体，令 $x + y = A$ ，则原式 $= A^2 + 2A + 1 = (A + 1)^2$ 。

再将“ A ” 还原，得原式 $= (x + y + 1)^2$ 。

上述解题时用到的是“整体思想”，整体思想是数学解题中常用的一种思想方法，请你解答下列问题：

(1) 因式分解 $1 + 2(x - y) + (x - y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 因式分解 $(a + b)(a + b - 4) + 4$ 。

(3) 求证：若 n 为正整数，则式子 $(n + 1)(n + 2)(n^2 + 3n) + 1$ 的值一定是某一个整数的平方。

11. 有四块小场地，第一块是边长为 a 的正方形，第二块是边长为 b 的正方形，第三、四两块都是长为 a ，宽为 b 的长方形。

(1) 若另有一块大长方形场地，它的面积等于四块小场地面积之和，它的长为 $2(a + b)$ ，用简单的式子表示出大长方形的宽 _____。

(2) 前两块面积之和设为 S_1 ，后两块面积之和为 S_2 ，试比较 S_1 ， S_2 的大小关系： S_1 _____ S_2
(填不等号)。

(3) 当 a 、 b 满足 _____ 时， $S_1 = S_2$ 。

12. 在日常生活中，取款、上网等都需要密码，为此，小明专门发明了一种用“因式分解”法产生的密码，方便记忆。原理是：如对于多项式 $x^4 - y^4$ ，因式分解的结果是 $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$ ，若取 $x = 9$ ， $y = 9$ 时，则各个因式的值是： $x - y = 0$ ， $x + y = 18$ ， $x^2 + y^2 = 162$ ，于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码。

(1) 对于多项式 $4x^3 - xy^2$ ，取 $x = 10$ ， $y = 10$ 时，写出用上述方法产生的密码：_____和_____。

(2) 对于多项式 $x^4y + xy^4$ 因式分解的结果是 $xy(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ ，当它的第一位因式码 xy 和第二位因式码 $(x + y)$ 构成的数是127时，第三位因式码 $(x^2 - xy + y^2)$ ：
：_____和_____。

13. 定义：若数 p 可以表示成 $P = x^2 + y^2 - xy$ (x, y 为自然数)的形式，则称 P 为“希尔伯特”数。

例如： $3 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 1$ ， $39 = 7^2 + 5^2 - 7 \times 5$ ， $147 = 13^2 + 11^2 - 13 \times 11 \dots$

所以3, 39, 147是“希尔伯特”数。

(1) 请写出两个10以内的“希尔伯特”数。

(2) 像39, 147这样的“希尔伯特”数都是可以用连续两个奇数按定义给出的运算表达出来，试说明所有用连续两个奇数表达出的“希尔伯特”数一定被4除余3。

(3) 已知两个“希尔伯特”数，它们都可以用连续两个奇数按定义给出的运算表达出来，且它们的差是224，求这两个“希尔伯特”数。

二、分组分解法的应用

14. 若三角形的三条边的长分别为 a 、 b 、 c ，且 $a^2b - a^2c + b^2c - b^3 = 0$ ，则这个三角形一定是()。

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

15. 若 $x + y = -1$ ，则 $x^4 + 5x^3y + x^2y + 8x^2y^2 + xy^2 + 5xy^3 + y^4$ 的值等于()。

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 3

16. 已知 $a - b = 3$ ， $b + c = -5$ ，则代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ac$ 的值为()。

- A. 38 B. 19 C. -12 D. -6

17. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $a^2c^2 + a^4 = b^4 + b^2c^2$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状为_____。

18. 某学校长方形操场的周长为440米，操场的两条边 a, b 满足 $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = 0$ ，求操场的面积为_____平方米。

19. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 且满足 $a^2b - ab^2 = bc - ac$, 试判断三角形的形状.

20. 已知: $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, 且 $ac + bd = 0$, 求 $ab + cd$ 的值.

21. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长, 满足等式 $a^2 + 2ab - c^2 - 2bc = 0$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

22. 若 a, b, c 是三角形的三条边, 求证: $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$.

23. 已知 $a > b > c > 0$ ，求适合等式 $abc + ab + cb + ca + a + b + c = 1989$ 的整数 a 、 b 、 c 的值为多少？

24. 已知在 $\triangle ABC$ 中，三边长 a 、 b 、 c 满足等式 $a^2 - 16b^2 - c^2 + 6ab + 10bc = 0$ 。求证： $a + c = 2b$ 。

25. 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边，当 $b^2 + 2ab = c^2 + 2ac$ 时。

- (1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由。
- (2) 若 $a = 4$ ， $b = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

26. 回答下列各题。

- (1) 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，试判断代数式 $(a^2 + b^2 - c^2)^2$ 与 $4a^2b^2$ 的大小。
- (2) 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $2a^3 + 4a^2b - 2a^2c = 4abc$ ，则 $\triangle ABC$ 是什么三角形？

27. 阅读下列材料：

常用分解因式的方法有提取公因式法、公式法及十字相乘法，但有部分多项式只单纯用上述方法就无法分解，如 $x^2 - 2xy + y^2 - 16$ ，我们细心观察这个式子就会发现，前三项符合完全平方公式，进行变形后可以与第四项结合再运用平方差公式进行分解．过程如下：

$$x^2 - 2xy + y^2 - 16 = (x - y)^2 - 16 = (x - y + 4)(x - y - 4) .$$

这种分解因式的方法叫分组分解法．利用这种分组的思想方法解决下列问题：

- (1) 填空：分解因式： $x^2 - 2xy + y^2 - 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 分解因式： $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y$.
- (3) $\triangle ABC$ 三边 a, b, c 满足 $a^2 + c^2 + 2b^2 - 2ab - 2bc = 0$ ，判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由 .

28. 观察“探究性学习”小组的同学分解因式：

$x^2 - xy + 4x - 4y = (x^2 - xy) + (4x - 4y) = x(x - y) + 4(x - y) = (x + 4)(x - y)$ 这种分解因式的方法叫“分组分解法”，请你利用这种方法解决下列问题：

已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长．

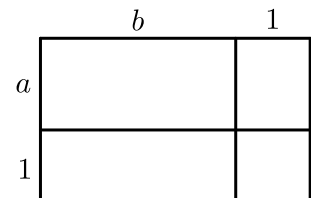
- (1) 若 $a^2 - ab + bc - ac = 0$ ，请判断 $\triangle ABC$ 的形状．
- (2) 比较 $a^2 - b^2$ 与 $c^2 - 2bc$ 的大小．

29. 已知： $\triangle ABC$ 的三边为 a 、 b 、 c 。

- (1) 因式分解： $a^2 - b^2 + 2c(a - b)$ 。
- (2) 若 $a^2 - b^2 + 2ac - 2bc = 0$ ，求证： $a = b$ 。
- (3) 求证： $a^2 + b^2 + 2ab - c^2 > 0$ 。

30. 因式分解可以解决很多数学问题，下面的问题都与因式分解有关。

- (1) 如图4个小长方形拼成一个大长方形，图中标注的数据是一些线段的长度，请你根据这个图形的面积关系，写出一个因式分解的等式。



- (2) 多项式 $ab + a + b + 1$ 的因式分解过程可以是这样的：
 $ab + a + b + 1 = a(b + 1) + (b + 1) = (a + 1)(b + 1)$ ，这种因式分解的方法叫做分组分解法，请你模仿这样的方法对多项式 $xy + 3x + 3y + 9$ 进行因式分解。
- (3) 设(1)中的大长方形面积为 S ，周长为 C ，其中 a 、 b 为正整数，问在2018，2019，2020三个数之中，有没有不可能是 $S + C$ 的值？请说明理由。
- (4) 积累了以上解题经验后，请你解决下面问题：
 黑板上写有 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$ 共100个数，每次操作先从黑板上100数中任选取两个数 a 、 b ，然后删去 a 、 b ，并写上数 $a + b + ab$ ，如选取的数是 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ ，则去掉 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$ 并写上 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ ，经过99次操作后，黑板上剩下的数是什么？说明理由。